

Zur Bestimmung der Materialfunktionen von Gasen bei hohen Temperaturen aus Messungen am Lichtbogen

Von G. SCHMITZ und J. UHLENBUSCH

Physikalisches Institut der Technischen Hochschule Aachen
(Z. Naturforsch. 18 a, 772—773 [1963]; eingegangen am 18. Mai 1963)

Die Vorgänge in der Säule eines langgestreckten zylinder-symmetrischen wandstabilisierten Lichtbogens lassen sich durch die folgenden Gleichungen beschreiben:

$$I = 2 \pi R^2 E \int_0^1 \sigma(T, p) \varrho \, d\varrho \quad (\text{OHMSches Gesetz}), \quad (1)$$

$$L_u = 2 \pi R^2 \int_0^1 u(T, p) \varrho \, d\varrho \quad (\text{Gesamtabstrahlung}), \quad (2)$$

$$R^2 [E^2 \sigma(T, p) - u(T, p)] = -\frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho} \varrho \kappa(T, p) \frac{\partial T}{\partial \varrho} \quad (\text{Leistungsbilanz}) \quad (3)$$

(I Gesamtbogenstrom, R Bogenradius, E konstante Feldstärke in Achsenrichtung, σ elektrische Leitfähigkeit, T einheitliche Bogentemperatur, p Bogendruck, ϱ normierter Bogenradius, L_u Gesamtabstrahlung pro Längeneinheit der Säule, u spezifische Abstrahlung, κ Wärmeleitfähigkeit).

Nach Einführung der Variablen S mit

$$S(T, p) = \int_{T_w}^T \kappa(T, p) \, dT, \quad (4)$$

wobei T_w die über die gesamte Bogenlänge konstante Wandtemperatur ist, erhält man für einen vorgegebenen Druck das einfachere Gleichungssystem

$$\frac{I}{2 \pi R^2 E} = \int_0^1 \sigma(S) \varrho \, d\varrho, \quad (5)$$

$$\frac{L_u}{2 \pi R^2} = \int_0^1 u(S) \varrho \, d\varrho, \quad (6)$$

$$S(\varrho, I) = R^2 \left\{ \int_1^{\varrho} [E^2 \sigma(S) - u(S)] t \ln t \, dt - \ln \varrho \int_0^{\varrho} [E^2 \sigma(S) - u(S)] t \, dt \right\}. \quad (7)$$

Gl. (7) folgt aus (3) durch zweimalige Integration unter Berücksichtigung der Randbedingungen

$$\partial S / \partial \varrho = 0 \text{ für } \varrho = 0 \text{ und } S = 0 \text{ für } \varrho = 1. \quad (8)$$

In zahlreichen Veröffentlichungen wurden angenäherte und exakte Lösungsmethoden der Gln. (1), (2) und (3) bei bekannten Materialfunktionen σ , u und κ und bei Vorgabe von Bogendruck, Bogenradius, Wandtemperatur und Achstemperatur angegeben. Diese Rechnungen liefern die Charakteristik, die Gesamtabstrahlung und

die radiale Verteilung der S -Funktion bzw. der Temperatur.

Umgekehrt ist es möglich, bei Kenntnis der integralen Bogengrößen, des Gesamtbogenstromes, der elektrischen Feldstärke und der Gesamtabstrahlung in Abhängigkeit von der Stromstärke, des Bogenradius und des Druckes, die Materialfunktionen $\sigma(S)$ und $u(S)$ und die radiale Verteilung der S -Funktion zu ermitteln. In angenäherter Weise ohne Einschluß der Abstrahlung wurden schon früher ähnliche Versuche unternommen¹. Hier soll ein exaktes Verfahren zur Lösung dieses Problems mitgeteilt werden.

In der ersten Näherung seien $\sigma(S)$ und $u(S)$ unabhängig vom Radius ϱ , d. h. man erhält mit den Gln. (5) und (6)

$$\sigma_0 = I / \pi R^2 E(I), \quad u_0 = L_u(I) / \pi R^2. \quad (9)$$

Zu diesen Materialfunktionen gehört in Strenge die parabelförmige S -Verteilung

$$S_0 = \frac{I E - L_u(I)}{4 \pi} (1 - \varrho^2). \quad (10)$$

Diese Approximation wird in folgender Weise verbessert: Die Funktionen $\sigma(S)$ und $u(S)$ erlauben die Darstellung

$$\sigma(S) = \sum_{\nu=1}^n A_{\nu} \varphi_{\nu}(S); \quad u(S) = \sum_{\nu=1}^n B_{\nu} \varphi_{\nu}(S), \quad (11)$$

wobei die Koeffizienten A_{ν} und B_{ν} nur von den Eigenschaften des Füllgases und vom Druck abhängen. Führt man als erste Näherung für S die bekannte Verteilung $S_0(\varrho, I)$ in Gl. (11) ein, so erhält man mit (5) und (6)

$$\frac{I}{2 \pi R^2 E} = \sum_{\nu=1}^n A_{\nu} \int_0^1 \varphi_{\nu}(S_0) \varrho \, d\varrho, \quad (12)$$

$$\frac{L_u}{2 \pi R^2} = \sum_{\nu=1}^n B_{\nu} \int_0^1 \varphi_{\nu}(S_0) \varrho \, d\varrho. \quad (13)$$

Aus diesen beiden Gleichungen können A_{ν} und B_{ν} nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate bestimmt werden. Damit ergibt sich die erste Näherung

$$\sigma_1(S_0) = \sigma_1(\varrho, I) \quad \text{und} \quad u_1(S_0) = u_1(\varrho, I)$$

und durch Integration folgt mit (7) die wesentlich verbesserte S -Funktion $S_1(\varrho, I)$. Das angegebene Verfahren läßt sich beliebig oft fortsetzen und konvergiert nach wenigen Schritten.

Zur Bestimmung der Temperaturabhängigkeit der Materialfunktionen σ und u sowie zur Bestimmung von $\kappa(T)$ und der radialen Temperaturverteilung im Bogen ergeben sich schließlich 3 Möglichkeiten:

1. Es sei eine Materialfunktion, etwa $\sigma(T)$ für das gewählte Gas hinreichend genau bekannt. Man kennt nach der vorgeschlagenen Methode $\sigma(S)$, $u(S)$ und $S(\varrho, I)$. Auf graphischem Wege läßt sich dann bei gegebenem $\sigma(S)$ und $\sigma(T)$ auch die Beziehung $S(T)$ finden. Damit kann man $u(T)$ und $T(\varrho, I)$ angeben,

¹ H. MAECKER, Z. Phys. 157, 1 [1959]; 158, 392 [1960].



und durch Differentiation der Funktion $S(T)$ nach T folgt $\kappa(T)$.

2. Es sei eine radiale Temperaturverteilung $T(\varrho, I^*)$ für eine bestimmte Stromstärke I^* gemessen. Dann erhält man bei bekanntem $S(\varrho, I^*)$ sofort eine Beziehung $S(T)$, woraus $\sigma(T)$, $u(T)$ und $\kappa(T)$ im Intervall $T = T_w$ (Wandtemperatur) bis $T = T_a$ (Achstemperatur) folgen.

3. Es sei die Achstemperatur des Bogens für verschiedene Stromstärken bekannt, d. h. $T(0, I)$. Dann läßt sich mit $S(0, I)$ ebenfalls eine Beziehung $S(T)$ finden, die, wie oben, zu den Funktionen $T(\varrho, I)$, $\sigma(T)$, $u(T)$ und $\kappa(T)$ führt.

Am Beispiel des Stickstoff- und Argonbogens soll das Verfahren in einer folgenden Arbeit praktische Anwendungen finden.

Die Protonenrelaxation in konzentrierten wäßrigen Lösungen von Magnesiumsulfat

Von U. LINDNER und H. PFEIFER

Physikalisches Institut der Universität Leipzig

(Z. Naturforschg. **18 a**, 773—775 [1963]; eingegangen am 24. Mai 1963)

Abb. 1 zeigt die longitudinale Protonenrelaxationszeit T_1 einer wäßrigen Magnesiumsulfatlösung bei 25 °C als Funktion der Konzentration des gelösten Magnesiumsulfates für eine Protonenresonanzfrequenz von 16 MHz. Die Relaxationsrate $1/T_1$ läßt sich genähert durch die Beziehung

$$\frac{1}{T_1} = \frac{n N_i}{N} \frac{3}{2} \frac{\gamma^4 \hbar^2}{b^6} (\tau - \tau_0) + \frac{1}{T_{10}} \quad (1)$$

darstellen. Dabei ist

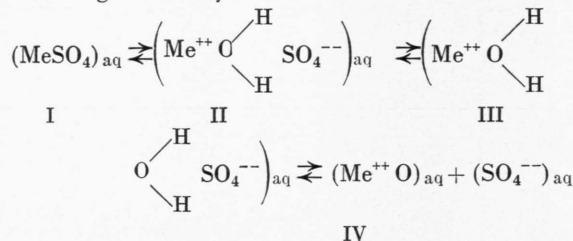
- n die Anzahl der Wassermoleküle in der 1. Koordinationssphäre des Mg^{++} -Ions,
- N_i die Anzahl der von Wassermolekülen umgebenen Magnesiumionen in der Lösung,
- N die Anzahl der Wassermoleküle in der Lösung,
- γ das gyromagnetische Verhältnis des Protons,
- \hbar der durch 2π geteilte Wert des PLANCKSchen Wirkungsquantums,
- b der Abstand der Protonen im Wassermolekül,
- τ die Korrelationszeit der Rotationsbewegung des Mg^{++} -Hydratkomplexes,
- τ_0 die Rotationskorrelationszeit eines freien Wassermoleküls und
- $1/T_{10}$ die longitudinale Relaxationsrate von reinem Wasser.

Die Annahme eines einstufigen Dissoziationsgleichgewichtes für Magnesiumsulfat mit der von DAVIS¹ angegebenen Gleichgewichtskonstante $K = 6,9 \cdot 10^{-3}$ mol kg^{-1} ergibt, daß in einer 3-molalen Magnesiumsulfatlösung weniger als 4% Mg^{++} -Ionen vorliegen. Aus Gl. (1) erhält man damit

$$\frac{\left(\frac{1}{T_1}(c=3 \text{ m}) - \frac{1}{T_{10}}\right)}{\left(\frac{1}{T_1}(c=2 \text{ m}) - \frac{1}{T_{10}}\right)} < 0,2 \quad (2)$$

im Widerspruch zu den Meßwerten der Abb. 1. Nach Vorstellungen von EIGEN und TAMM² dissoziieren jedoch

zweiwertige Elektrolyte über zwei Zwischenstufen:



und es ergibt sich mit den Gleichgewichtskonstanten von EIGEN und TAMM², daß in der betrachteten Magnesiumsulfatlösung auch bei den höchsten Konzentrationen noch etwa 90% aller Mg^{++} -Ionen unmittelbar von Wassermolekülen umgeben sein sollten. Dies bedeutet aber, daß der Quotient in Gl. (2) nicht $< 0,2$, sondern $> 1,3$ sein muß in Übereinstimmung mit den Meßergebnissen. Aus den vorliegenden Meßwerten wurde die mittlere Rotationskorrelationszeit $\tau \approx 6 \cdot 10^{-11}$ sec

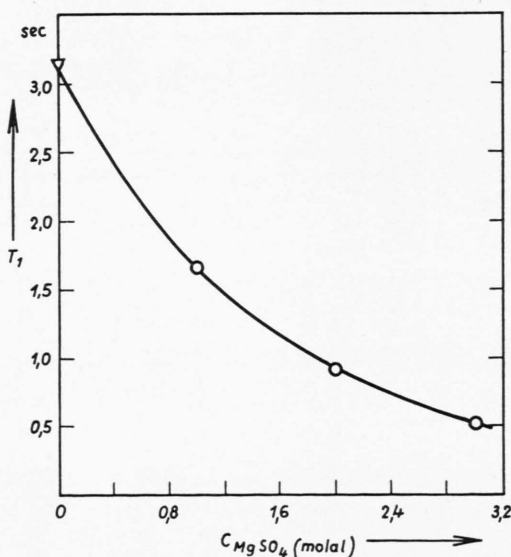


Abb. 1. Longitudinale Protonenrelaxationszeit T_1 einer wäßrigen Lösung von $MgSO_4$ als Funktion der Konzentration C_{MgSO_4} bei einer Resonanzfrequenz von 16 MHz und einer Proben temperatur von 25 °C.

¹ C. W. DAVIS, Disc. Faraday Soc. **24**, 83 [1957].

² M. EIGEN u. K. TAMM, Z. Elektrochem. **66**, 107 [1962].